



ПРЕЗИДЕНТСКАЯ
АКАДЕМИЯ

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНЫХ СБЕРЕЖЕНИЙ РОССИЙСКИХ ИНВЕСТОРОВ

магистратура Цифровая экономика

Студент: Дербенцев Илья Сергеевич

Научный руководитель:
с.н.с., к.э.н., Чернова Мария Игоревна

Москва, 2025

2025

РАНХиГС

Актуальность исследования

- В настоящее время в России проводится реформа пенсионных накоплений, которая включает в себя отказ от прежних моделей пенсионных накоплений и переход к добровольным инструментам, таким как Программа долгосрочных сбережений.
- Исторически, доходность пенсионных накоплений и резервов негосударственных пенсионных фондов (НПФ) остается ниже уровня инфляции.
- Новые финансовые продукты для долгосрочных сбережений обуславливают необходимость научно обоснованных подходов к портфельному управлению.
- Текущая тенденция к уменьшению доли акций в портфелях пенсионных фондов (ПФ) приводит к росту их волатильности и снижает их долгосрочную доходность.
- В существующих в России системах долгосрочных сбережений не учитываются индивидуальные риск-профили инвесторов
- Альтернативой этому может быть доверительное управление, однако его высокая стоимость ограничивает масштабируемость. В мировой практике распространен более доступный подход – стратегии жизненного цикла, учитывающие риск-профили по когортам.
- На сегодняшний день отсутствует единый алгоритм адаптации стратегий жизненного цикла, включая оптимизацию траекторий снижения доли акций, с учётом специфики российского рынка долгосрочных сбережений.

Анализ предметной области

Стратегии управления портфелем и инвестициями

АВТОРЫ	НАЗВАНИЕ РАБОТЫ, ГОД	ИСТОЧНИК	РЕЗУЛЬТАТ
J. Sun, D. Zhu, E. Platen	Dynamic asset allocation for target date funds under the benchmark approach (2021)	Astin bulletin	Предлагается системный подход к разработке динамических стратегий TDF, учитывающий дату выхода на пенсию и предпочтения в отношении рисков. Такой портфель TDF состоит из оптимальной для роста накоплений части и безрискового актива.
A.K. Basu, A. Byrne, M.E. Drew	Dynamic Lifecycle Strategies for Target Date Retirement Funds(2011)	Journal of portfolio management	Динамическая стратегия, в которой доля акций снижается лишь в том случае, когда достигается целевой уровень годовой доходности, показывает лучшие результаты по сравнению с классическим подходом фондов с целевой датой и портфелем из 100% акций.
E.J. Elton, M.J. Gruber, A. de Souza, C.R. Blake	Target Date Funds: Characteristics and Performance (2015)	Review of asset pricing studies	Классический подход: ФЖЦ - держатели облигаций и акций. В реальности многие ФЖЦ содержат и другие фонды. Высокая комиссия.
P. Antolin, S. Payet, J. Yermo	“Assessing Default Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans” (2010)	OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions	С учетом разных типов выплат то или иное решение оказывается предпочтительнее и ни одна из инвестиционных стратегий не доминирует во всех случаях. Продолжительность периода пенсионного плана влияет на рейтинг портфелей. Стратегии жизненного цикла работают лучше, чем фиксированные портфели, в особенности для более длительных горизонтов

Цели и задачи исследования

Цель исследования

Разработка и эмпирическая проверка применимости динамических стратегий для российских долгосрочных инвесторов на примере Программы Долгосрочных Сбережений.

Задачи исследования

1. Постановка и решение задачи оптимизации терминального благосостояния в рамках бенчмарк подхода.
2. Оценка параметров модели минимального рынка для моделирования бенчмарка
3. Эмпирическое моделирование движения капитала
4. Адаптация стратегий к контексту ПДС
5. Оценка полученных данных
6. Анализ чувствительности модели
7. Формулировка практических рекомендаций и выводов

1. Постановка задачи оптимизации конечного благосостояния в рамках бенчмарк подхода

ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ

$$u(v) = \begin{cases} \frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1 \\ \log(v), & \gamma = 1 \end{cases}$$

- γ — параметр склонности к риску.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(V(0))} \mathbb{E}[u(V^\pi(T))]$$

- $u(v)$ — функция полезности (CRRA).
- $V^\pi(T)$ — конечное благосостояние.
- $\mathcal{A}(V(0))$ — допустимые стратегии.

БЮДЖЕТНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

$$V(0) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} V(T) \right]$$

- Левая часть — текущий капитал.
- Правая — приведённое ожидание будущего капитала.

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

$$\max_{\xi \in L_+^p} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- Статическая задача упрощает оптимизацию.

ЗАДАЧА С УЧЕТОМ ПОПОЛНЕНИЙ

$$\max_{\xi \in L_+^p} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- $C(t)$ — реальные взносы в пенсионный счёт на момент t .

1. Решение задачи оптимизации конечного благосостояния в рамках бенчмарк подхода

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

ЗАДАЧА С УЧЕТОМ ПОПОЛНЕНИЙ

$$\xi^* = \left(\frac{V(0)}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]} \right) \cdot \left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{-1/\gamma} \longrightarrow V^*(t) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(t)}{S^*(T)} \cdot \xi^* | \mathcal{F}_t \right] \longleftarrow \xi^* = \left(k + \sum_{t=0}^T \frac{C(t)}{S^*(t)} \right) \cdot \frac{1}{\mathbb{E} \left[\left(S^*(T) \right)^{-1+\frac{1}{\gamma}} \right]} \cdot \left(S^*(T) \right)^{1/\gamma}$$

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПОРТФЕЛЯ

ОПТИМАЛЬНАЯ ДОЛЯ РИСК АКТИВА

РОСТ КАПИТАЛА

$$\delta^*(t) = \frac{dV^*(t)}{dS^*(t)}$$

$$\pi^*(t) = \frac{\delta^*(t) \cdot S^*(t)}{V^*(t)} = 1 + \frac{S^*(t)}{F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)}$$

$$V_{t+1} = V_t \cdot \left[\pi^*(t) \cdot \frac{S_{t+1}}{S_t} + (1 - \pi^*(t)) \right]$$

Практическое решение задачи:

1 этап – подбор параметров α и η модели минимального рынка для оценки риск актива (GP)

В модели минимального рынка динамика капитала задается уравнением

$$dS(t) = (\alpha_0 e^{\eta t}) dt + \sqrt{\alpha_0 e^{\eta t} \cdot S(t)} dW(t)$$

А ожидание доходности риск актива в момент времени t задается как

$$\mathbb{E}[S^*(t)] = 1 + \frac{\alpha}{\eta} (e^{\eta t} - 1)$$

2 этап – оценка методом Монте-Карло ожидаемой конечной доходности риск актива $F(t)$ $F(t) = \mathbb{E}[(S^*(T))^{\alpha} | \mathcal{F}_t]$

3 этап – численное нахождение чувствительности ожидания к текущей стоимости риск актива $dF(t)/dS(t)$

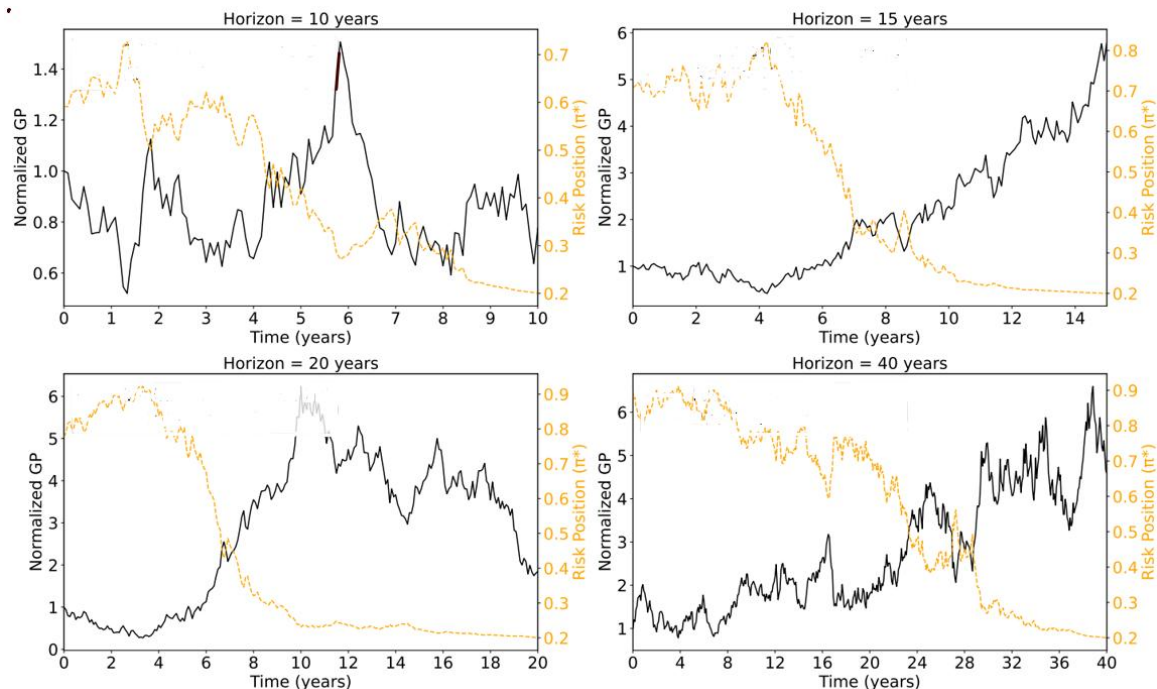
4 этап – определение оптимальной доли риск актива в портфеле в момент времени t

5 этап – определение роста капитала

3. Анализ результатов моделирования оптимальной траектории

Сопоставление доходности риск-актива и оптимальной его доли

$$\pi^*(t) = 1 + \frac{S^*(t)}{F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)}$$



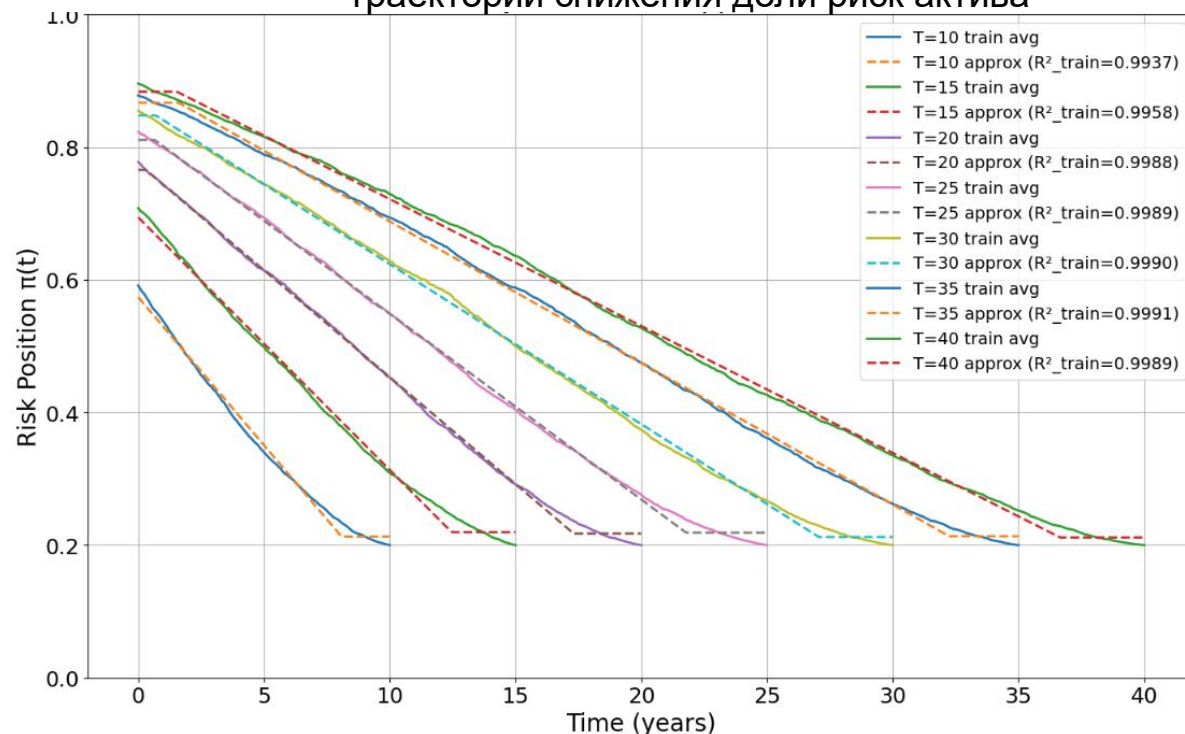
- оптимальная доля риск актива в портфеле
- доходность риск актива

Horizon (years)	Strategy	Лог-доходн. [%]	Ст. откл. [%]	Макс. просадка [%]
10	GP→BA	6.69→4.60	8.12→1.60	57.31→30.27
15	GP→BA	6.18→4.84	5.51→2.15	62.16→40.48
20	GP→BA	5.83→4.64	4.15→1.40	65.05→45.63
40	GP→BA	4.62→4.01	2.12→0.69	71.50→58.26

- BA дает более стабильную доходность при умеренной потере в лог-доходности.
 - Максимальные просадки у GP почти в два раза выше на всех горизонтах.
 - BA демонстрирует меньшую волатильность в особенности на длинных горизонтах
 - $\pi^*(t)$ убывает со временем — соответствие TDF-логике.
- Аллокация адаптивна к переоценённости рынка.

4. Адаптация стратегий к контексту ПДС

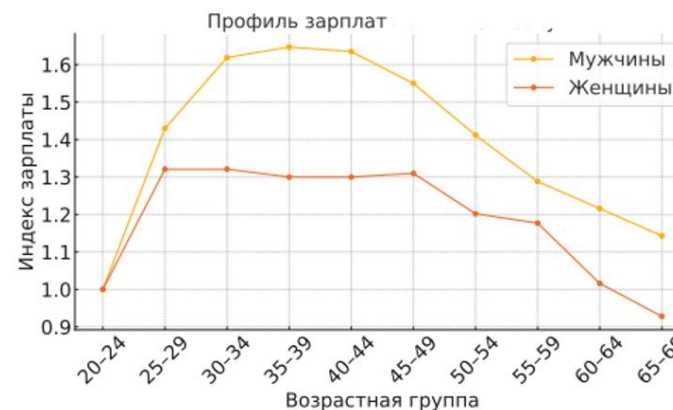
Аппроксимация медианной траектории для моделирования
траектории снижения доли риск актива



- 1) $\pi^*(t)$ задает стратегию инвестирования: долю в рисковом активе на каждом шаге моделирования.
- 2) Аппроксимация используется в дальнейших симуляциях капитала $V(t)$ с учетом пополнений $C(t)$
- 3) Это позволяет изучить влияние фиксированной структуры риска на накопления, коэффициент замещения (RR), VaR и другие метрики

При оценке результатов долгосрочного накопления учитывались:

- 1) Разные горизонты планирования
- 2) Типовые профили заработных плат с учетом пола
- 3) Государственное софинансирование в рамках ПДС
- 4) Возможность разморозки пенсионных накоплений
- 5) Комиссии в рамках ПДС



Государственные субсидии в рамках ПДС

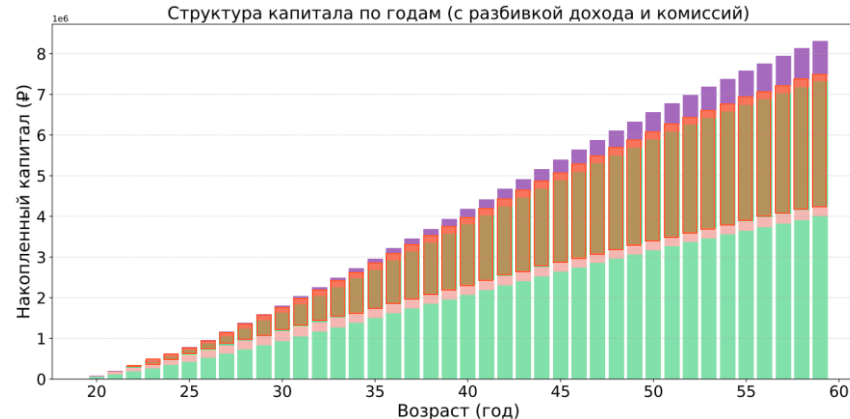
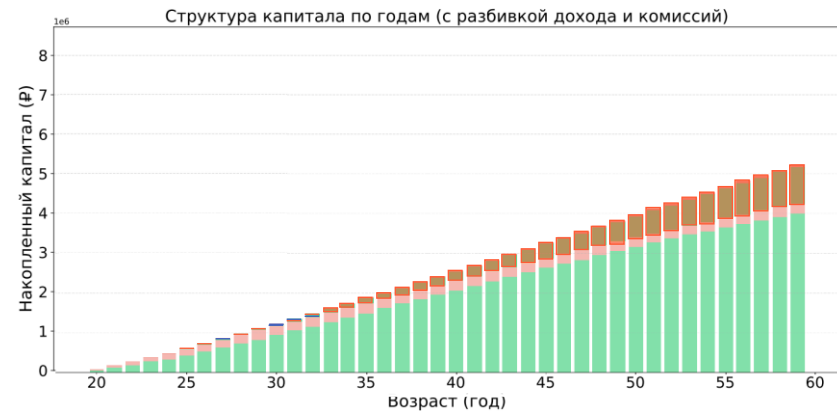
Среднемесячный доход	Формула софинансирования	Годовой взнос для максимальной субсидии
До 80 000 Р	1 : 1	36 000 Р
80 000–150 000 Р	1 : 2	72 000 Р
Свыше 150 000 Р	1 : 4	144 000 Р

5. Оценка полученных данных

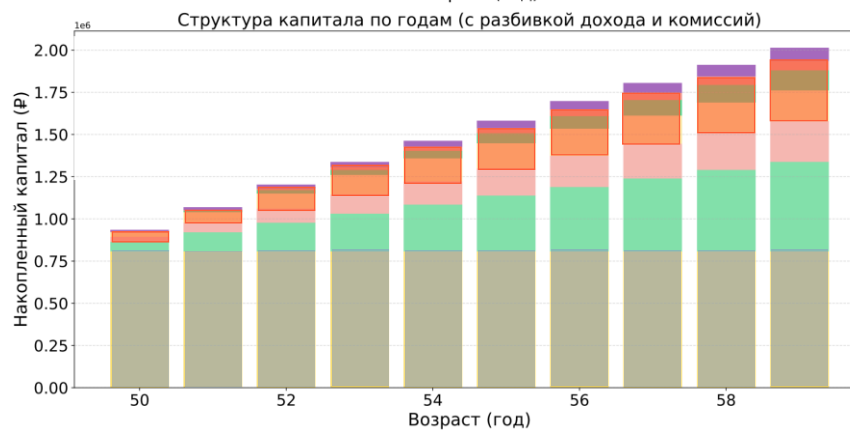
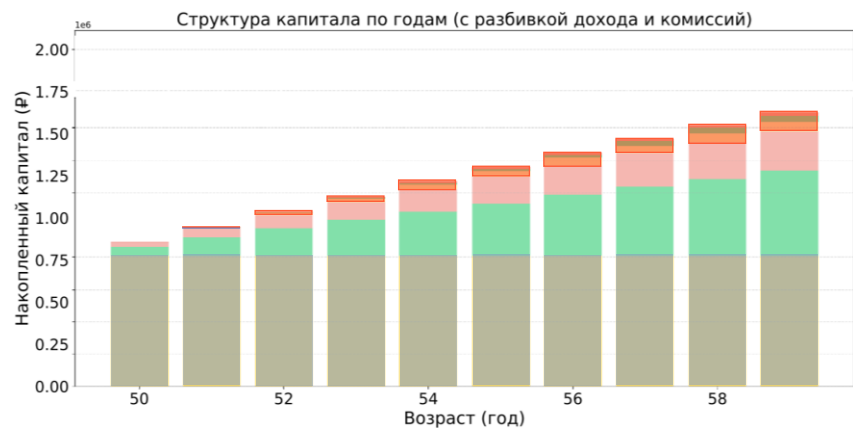
Безрисковая стратегия

Оптимальная стратегия

20
Лет

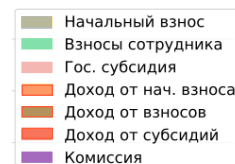


50
Лет

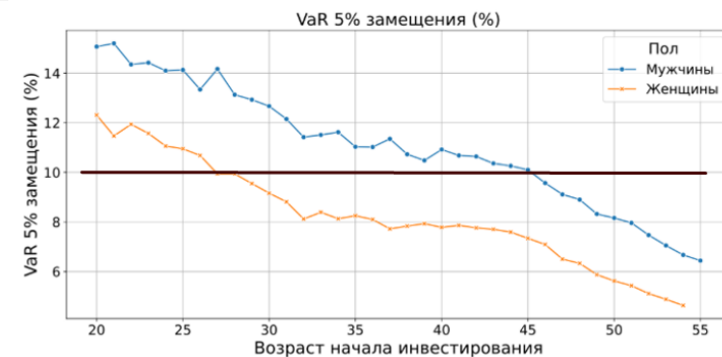
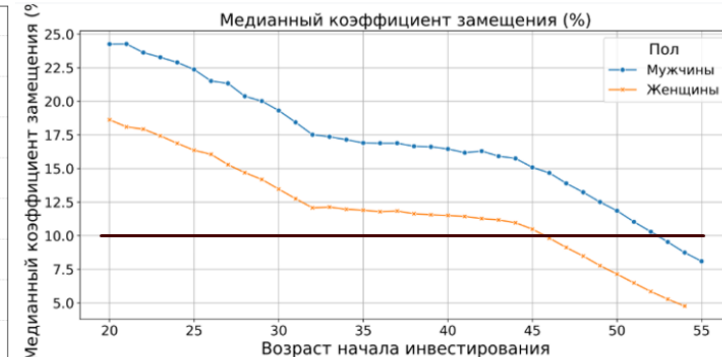


При старте в 20 лет рост капитала идёт за счёт доходности.

При старте в 50 лет основное накопление обеспечивается взносами.



Влияние возраста на коэффициент замещения (КЗ)



Наиболее поздний возраст начала инвестирования для достижения КЗ10%

Пол	медиана	VaR
Муж.	52	45
Жен.	45	27

Результат исследования

Научный результат:

Модель стратегии долгосрочных сбережений на основе бенчмарк-подхода, учитывающая возраст, пол, субсидии, комиссии, позволяющая обоснованно сравнивать траектории накоплений и риск-доходность для российских долгосрочных инвесторов и выбирать оптимальные траектории ребалансировки.

Теоретическая значимость:

- Работа расширяет применение бенчмарк-подхода в контексте долгосрочного пенсионного планирования, адаптируя его к специфике российской экономической и институциональной среды.
- Модель интегрирует демографические и институциональные факторы (пол, возраст, субсидии, комиссии), демонстрируя, как они влияют на оптимальные инвестиционные решения и формирование пенсионного капитала, что способствует развитию теории индивидуального финансового планирования.

Практическая значимость:

- Модель позволяет формировать стратегии долгосрочных накоплений с учетом различных факторов для когорт
- Результаты применимы для оценки и оптимизации программ ПДС и стратегий НПФ



ПРЕЗИДЕНТСКАЯ
АКАДЕМИЯ

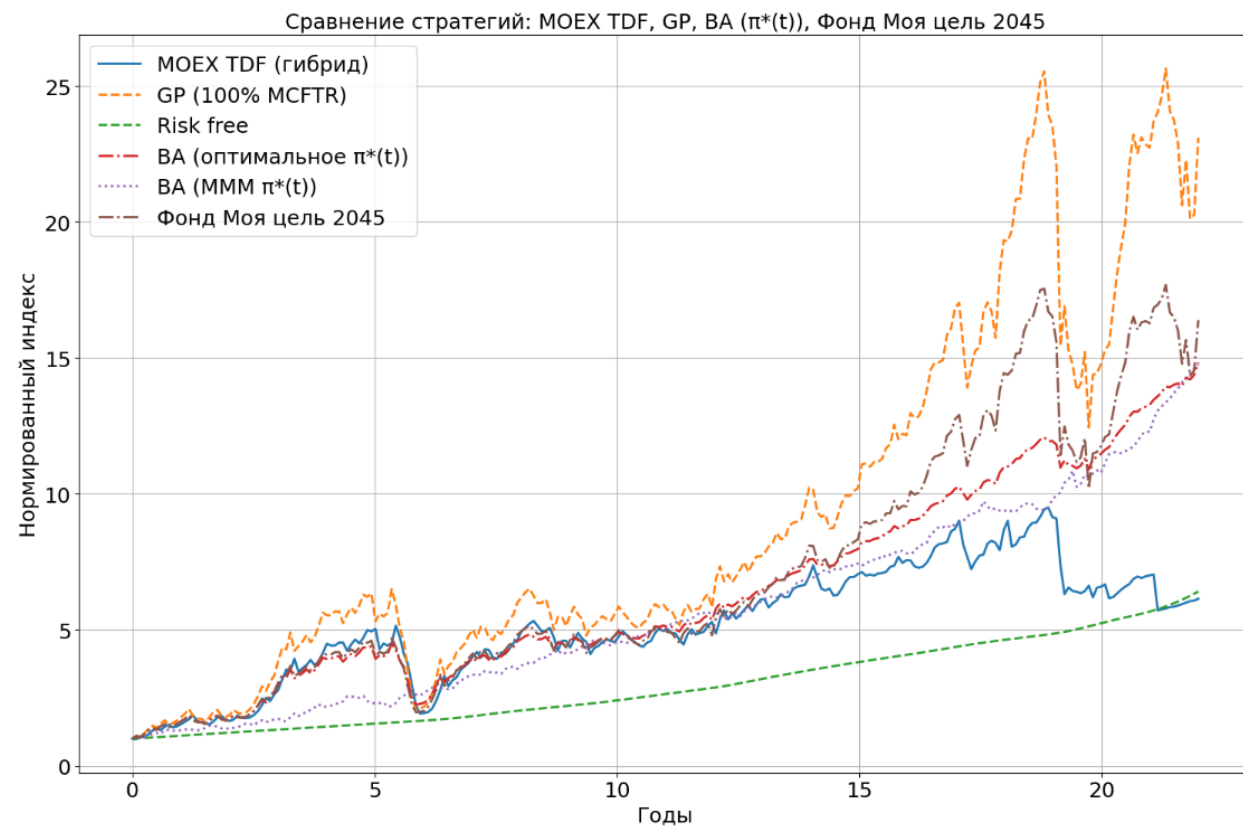
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Москва, 2025

2025

РАНХиГС

Сопоставление с ФЖЦ России



Стратегия	Ann. Log Return (%)	Annual Volatility (%)	Max Drawdown (%)	Max Drawdown Duration (months)
MOEX TDF	8,25	21,02	62,67	45
GP (100%)	14,27	25,71	67,91	45
BA (π^*)	12,26	14,15	50,02	30
BA (π MMM)	12,24	8,54	15,65	16
Моя цель 2045	12,71	20,27	58,11	43

Решение задачи оптимизации конечного благосостояния (подробнее1)

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

$$\max_{\xi \in L^p_+} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- Статическая задача упрощает оптимизацию.

$$L(\xi, \lambda) = \mathbb{E}[u(\xi)] + \lambda \left(V(0) - \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right] \right)$$

$$u'(\xi^*) = \lambda^* \cdot \frac{S^*(0)}{S^*(T)} \longrightarrow \xi^* = (u')^{-1} \left(\lambda^* \cdot \frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)$$

$$(u')^{-1}(y) = y^{-1/\gamma} \longrightarrow \xi^* = \left(\lambda^* \cdot \frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{-1/\gamma}$$

$$V(0) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \cdot \xi^* \right] \longrightarrow \lambda^* = \left(\frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]}{V(0)} \right)^{\gamma} \longrightarrow \xi^* = \left(\frac{V(0)}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]} \right) \cdot \left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{-1/\gamma}$$

ЗАДАЧА С УЧЕТОМ ПОПОЛНЕНИЙ

$$\max_{\xi \in L^p_+} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- $C(t)$ — реальные взносы в пенсионный счёт на момент t .

$$L(\xi, \lambda) = \mathbb{E}[u(\xi)] + \lambda \left(V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t) - \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right] \right)$$

$$\xi^* = (u')^{-1} \left(\lambda^* \cdot \frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right) = \left(\lambda^* \cdot \frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{-1/\gamma}$$

$$\lambda^* = \left(\frac{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]}{V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t)} \right)^{\gamma} \longrightarrow \xi^* = \left(\frac{V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t)}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]} \right) \cdot \left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{-1/\gamma}$$

$$V(0) = k \cdot S^*(0) \quad \xi^* = \left(k + \sum_{t=0}^T \frac{C(t)}{S^*(t)} \right) \cdot \frac{1}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]} \cdot \left(\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \right)^{1/\gamma}$$

Решение задачи оптимизации конечного благосостояния (подробнее2)

СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

$$\max_{\xi \in L_+^p} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- Статическая задача упрощает оптимизацию.

$$V^*(t) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(t)}{S^*(T)} \cdot \xi^* | \mathcal{F}_t \right] \longrightarrow V^*(t) = S^*(t) \cdot \frac{V(0)/S(0)}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \mathbb{E}[(S^*(T))^\alpha | \mathcal{F}_t]$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad F(t) = \mathbb{E}[(S^*(T))^\alpha | \mathcal{F}_t]$$

$$V^*(t) = S^*(t) \cdot \frac{V(0)}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot F(t)$$

$$\delta^*(t) = \frac{dV^*(t)}{dS^*(t)} = \frac{V(0)}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \left(F(t) + S^*(t) \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)} \right)$$

$$\pi^*(t) = \frac{\left[\frac{V(0)}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \left(F(t) + S^*(t) \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)} \right) \right] \cdot S^*(t)}{S^*(t) \cdot \frac{V(0)}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot F(t)}$$

$$\pi^*(t) = \frac{1}{\gamma} + \frac{S(t)}{A(t)} \cdot \frac{dA(t)}{dS}$$

$$\frac{dF}{dS} = \alpha S^{\alpha-1} A(t) + S^\alpha \cdot \frac{dA}{dS}$$

$$F(t) = S(t)^\alpha \cdot A(t),$$

$$A(t) = \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{S(T)}{S(t)} \right)^{1/\gamma-1} \right]$$

$$\pi^*(t) = 1 + \frac{S^*(t)}{F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)}$$

ЗАДАЧА С УЧЕТОМ ПОПОЛНЕНИЙ

$$\max_{\xi \in L_+^p} \mathbb{E}[u(\xi)] \quad \text{s.t.} \quad V(0) + \sum_{t=0}^T \frac{S^*(0)}{S^*(t)} C(t) = \mathbb{E} \left[\frac{S^*(0)}{S^*(T)} \xi \right]$$

- $\xi = V(T)$ — распределение конечного капитала.
- $C(t)$ — реальные взносы в пенсионный счёт на момент t .

$$V^*(t) = S^*(t) \cdot \left(k + \sum_{u=0}^T \frac{C(u)}{S^*(u)} \right) \cdot \frac{1}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \mathbb{E}[(S^*(T))^\alpha | \mathcal{F}_t]$$

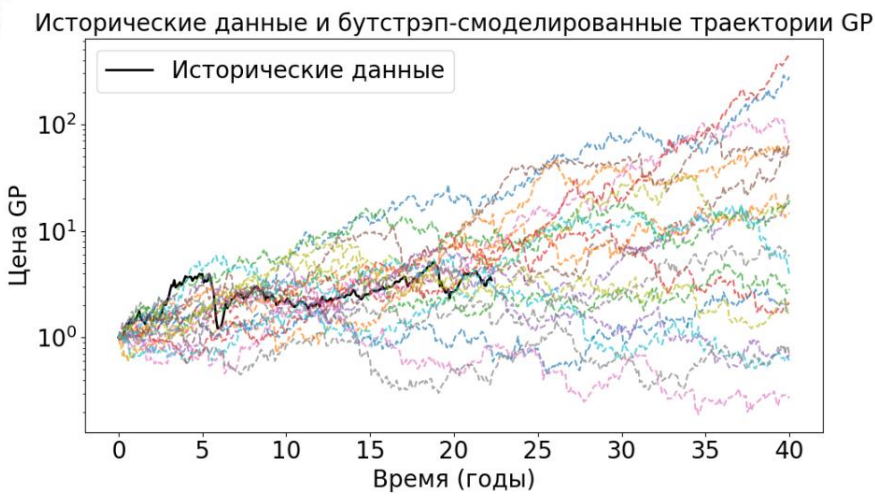
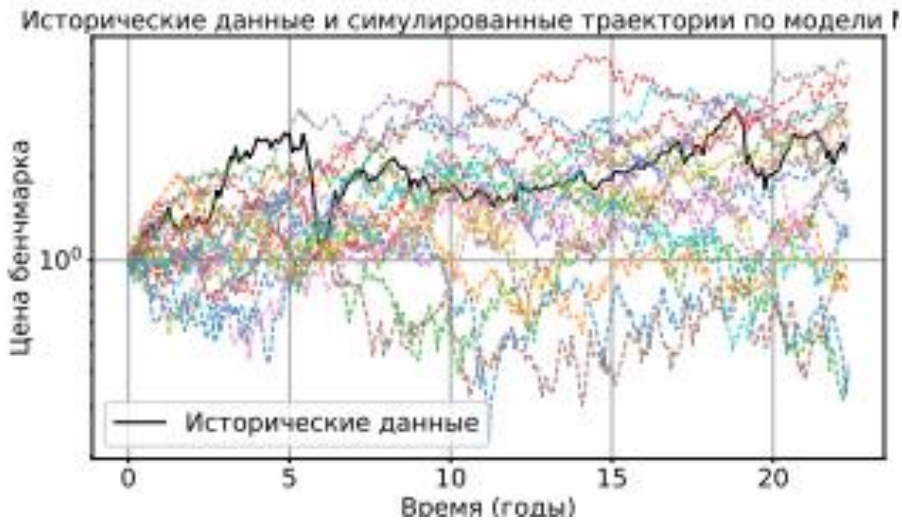
$$A = k + \sum_{u=0}^T \frac{C(u)}{S^*(u)}, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad F(t) = \mathbb{E}[(S^*(T))^\alpha | \mathcal{F}_t]$$

$$V^*(t) = S^*(t) \cdot \frac{A}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot F(t)$$

$$\delta^*(t) = \frac{dV^*(t)}{dS^*(t)} = \frac{A}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \left(F(t) + S^*(t) \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)} \right)$$

$$\pi^*(t) = \frac{\delta^*(t) \cdot S^*(t)}{V^*(t)} = \frac{A}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot \frac{\left(F(t) + S^*(t) \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)} \right) \cdot S^*(t)}{S^*(t) \cdot \frac{A}{\mathbb{E}[(S^*(T))^{-\alpha}]} \cdot F(t)}$$

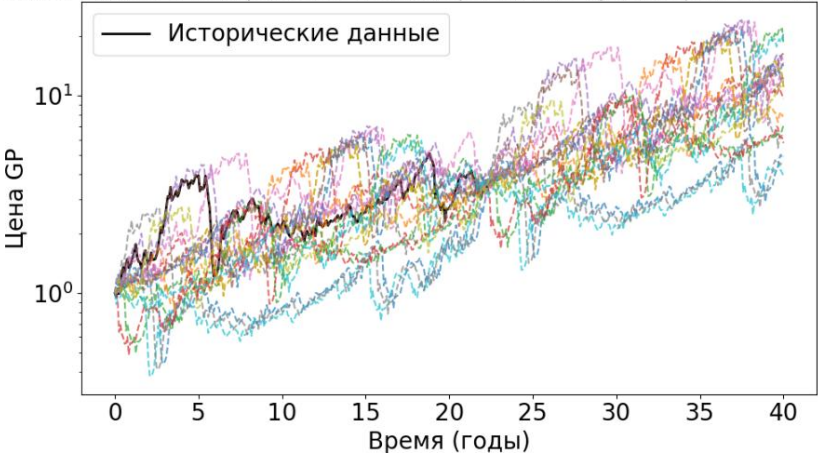
Сопоставление МММ с бутстрэп ресемплированием и методом скользящего окна



Горизонт (лет)	Источник	Annualized Return [%]	Std Return [%]	Annualized Volatility [%]	Log Annual Return [%]	Max Drawdown [%]
18	Истор.	3,76	2,66	24,32	3,66	69,26
18	МММ	6,24	4,59	36,95	5,95	63,66
20	Истор.	4,81	0,62	24,73	4,70	69,26
20	МММ	6,10	4,14	36,29	5,85	64,64
22	Истор.	5,88	0,10	24,82	5,72	69,26
22	МММ	5,88	3,81	35,64	5,62	65,57
40	МММ	4,70	2,06	31,69	4,57	71,21

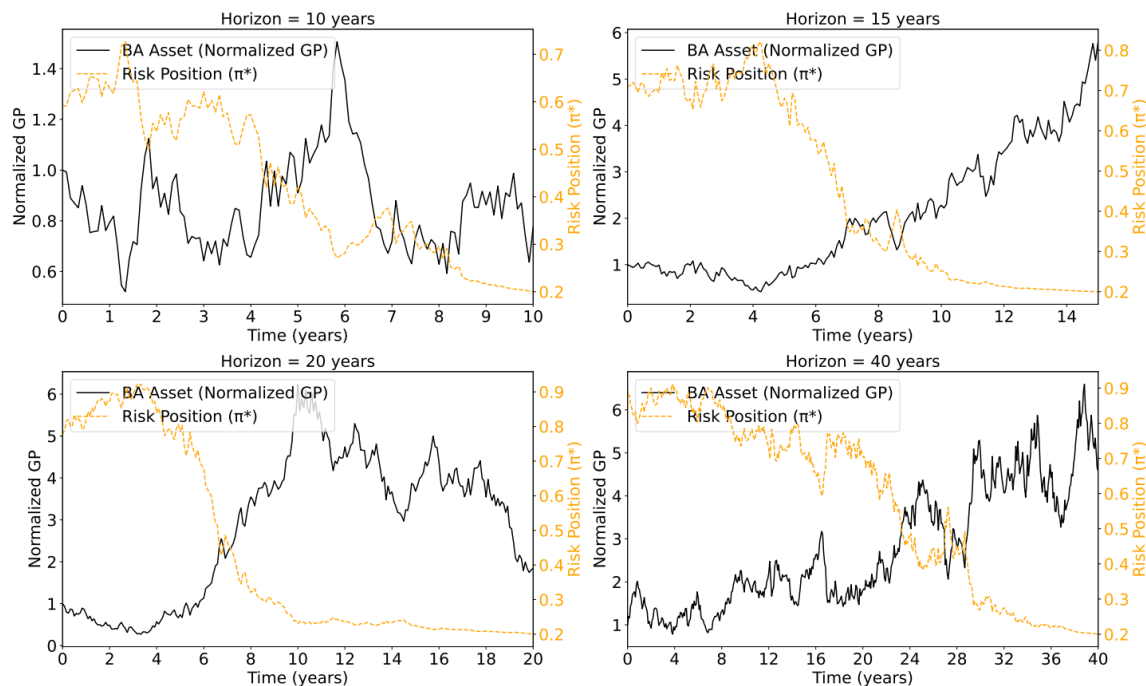
Метод	Лог-доходн, %	Ст отклон, %	Ср. просадка, %
Скользящее окно	4,57	1,94	71,59
МММ	4,64	2,06	71,21
Бутстрэп	4,57	1,16	69,26

Исторические данные и исторически смоделированные траектории GP (лог-пространство)



Пример реализации смоделированной траектории

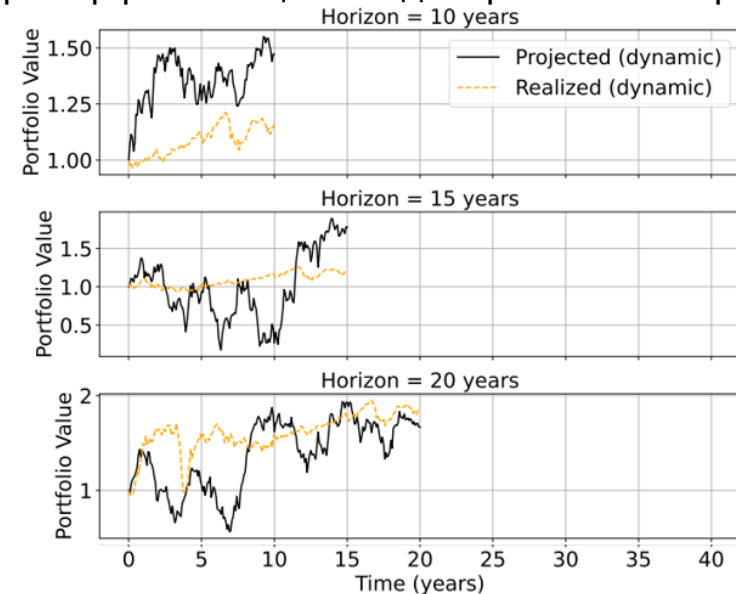
$$\pi^*(t) = 1 + \frac{S^*(t)}{F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dS^*(t)}$$



$\pi^*(t)$ убывает со временем — соответствие TDF-логике.

Аллокация адаптивна к переоценённости рынка.

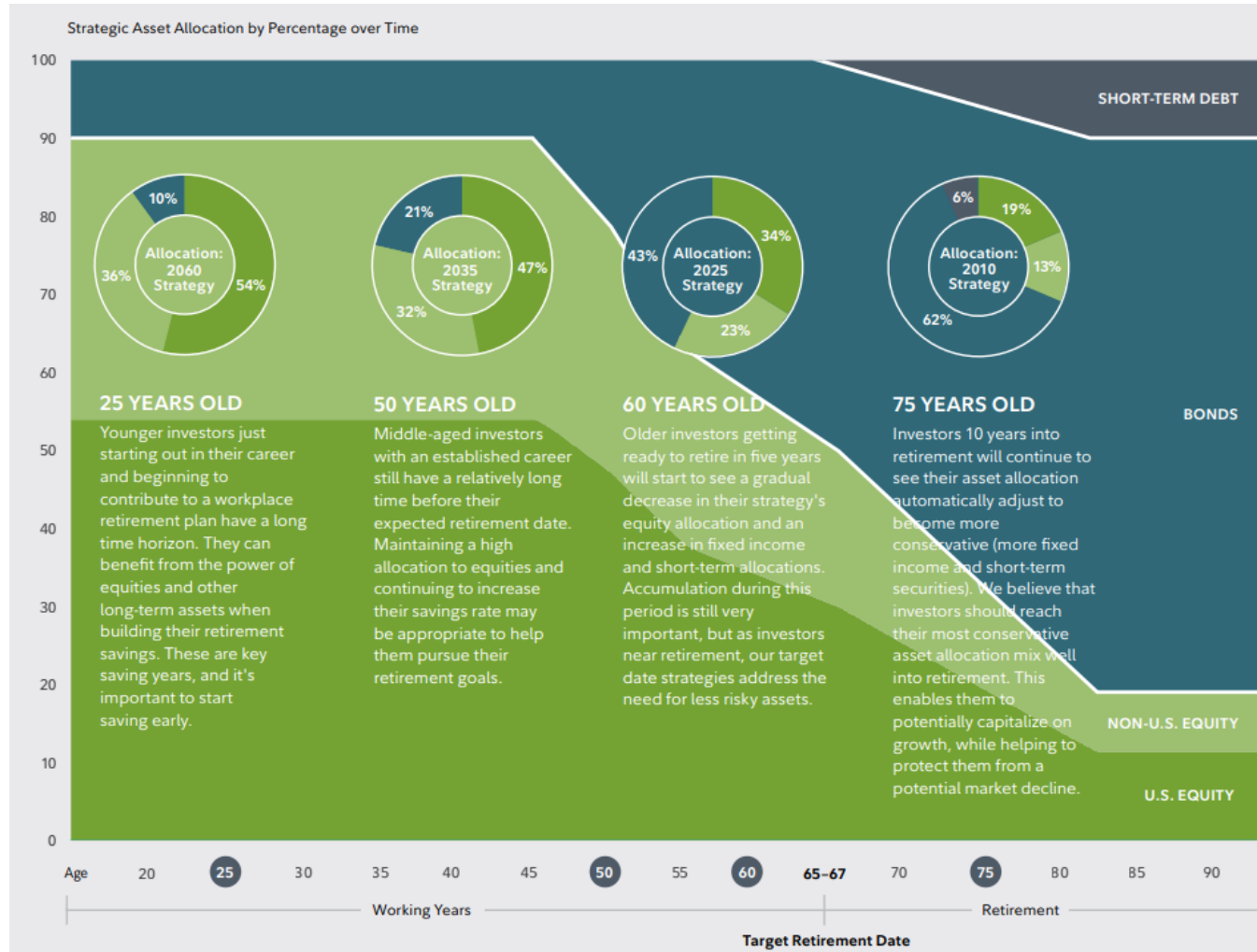
Пример реализации смоделированного портфеля



Horizon (years)	Strategy	Лог-доходн. [%]	Ст. откл. [%]	Макс. просадка [%]
10	GP→BA	6.69→4.60	8.12→1.60	57.31→30.27
15	GP→BA	6.18→4.84	5.51→2.15	62.16→40.48
20	GP→BA	5.83→4.64	4.15→1.40	65.05→45.63
40	GP→BA	4.62→4.01	2.12→0.69	71.50→58.26

- BA дает более стабильную доходность при умеренной потере в лог-доходности.
- Максимальные просадки у GP почти в два раза выше на всех горизонтах.
- BA демонстрирует меньшую волатильность в особенности на длинных горизонтах

Пример TDF Fidelity



О КОМИССИЯХ

Программа долгосрочных сбережений

0,6% от средней совокупной стоимости средств в 2024-2026 гг. и 0,5% начиная с 2027 г.

Помимо этого переменное вознаграждение 20% до бенчмарка и 25% после бенчмарка из дохода от размещения средств.

Моя цель 2045

1,2% от среднегодовой стоимости активов

Биржевые БПИФы

УК Первая Топ Российских акций 1,06% от СЧА

Т-Капитал Индекс МосБиржи 0,79% от СЧА

ВИМ Акции 0,67% от СЧА (минимальный взнос 1000руб)

Облигационные БПИФы

УК Первая 2,15% от СЧА (минимальный взнос 100руб)

Т-Капитал Пассивный доход 0,99% от СЧА

Альфа Капитал Облигации Плюс 1,83% от СЧА (минимальный взнос 100руб)

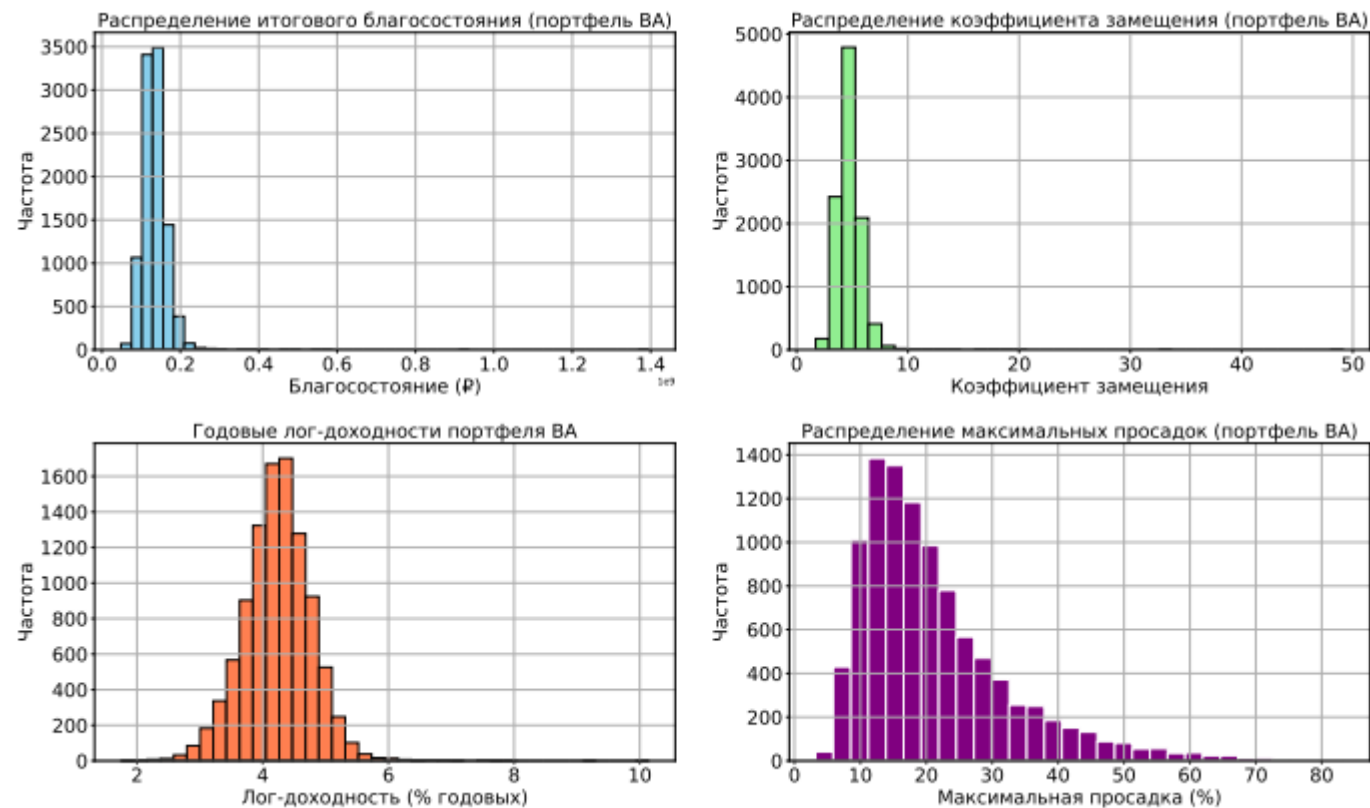
Fidelity Freedom Index Funds

0,12% от совокупной стоимости средств ежегодно

Vanguard TDF

0,08% от совокупной стоимости средств ежегодно

Полученные распределения параметров портфеля



Бенчмарк подход и мартингалы

- Оптимальный портфель роста $S^*(t)$:
 - 1 Максимизирует логарифмический прирост.
 - 2 Превращает дисконтированные активы в мартингалы.
- $\mathcal{F}_t$ — доступная рыночная информация на момент t .

Комментарий: Если дисконтировать актив по $S^*(t)$, то его цена становится **мартингалом**, т.е.

$$\mathbb{E} \left[\frac{X(T)}{S^*(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{X(t)}{S^*(t)}$$

Это означает, что условное ожидание будущей стоимости (в единицах GP) совпадает с текущей — нет возможности обыграть рынок.

- Мартингал — это случайный процесс, для которого выполняется:

$$\mathbb{E}[X(t+1) | \mathcal{F}_t] = X(t)$$

- В контексте ВА: если актив $X(t)$ дисконтировать по $S^*(t)$, то:

$$\mathbb{E} \left[\frac{X(T)}{S^*(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{X(t)}{S^*(t)}$$

- Это значит: **нельзя систематически "обыграть" GP.**

- $\mathcal{F}_t$ — это **абстрактная информация**, доступная инвестору на момент времени t .
- Математически: $\mathcal{F}_t$ — это σ -алгебра, порождённая всей историей наблюдаемых рыночных процессов.
- В статье [6] :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{S^*(s)\}_{s \leq t})$$

- То есть $\mathcal{F}_t$ содержит всю информацию о динамике GP до момента t .
- В силу того, что в модели используется MMM, а поведение бенчмарка $S^*(t)$ — марковский процесс, достаточно $\mathcal{F}_t = S^*(t)$.

2. Оценка параметров модели минимального рынка для моделирования бенчмарка

- Рост-оптимальный актив $S^*(t)$: индекс полной доходности Мосбиржи (MCFTR.INDX), RUGBITR1Y.INDX - однолетний индекс доходности ОФЗ
- Безрисковый актив $B(t)$: доходность по депозитам 10 крупнейших банков (OKID10.INDX).
- Рассматривается отношение $S^*(t)/B(t)$ — "номинированная" цена GP.



$$dS(t) = (\alpha_0 e^{\eta t}) dt + \sqrt{\alpha_0 e^{\eta t} \cdot S(t)} dW(t)$$

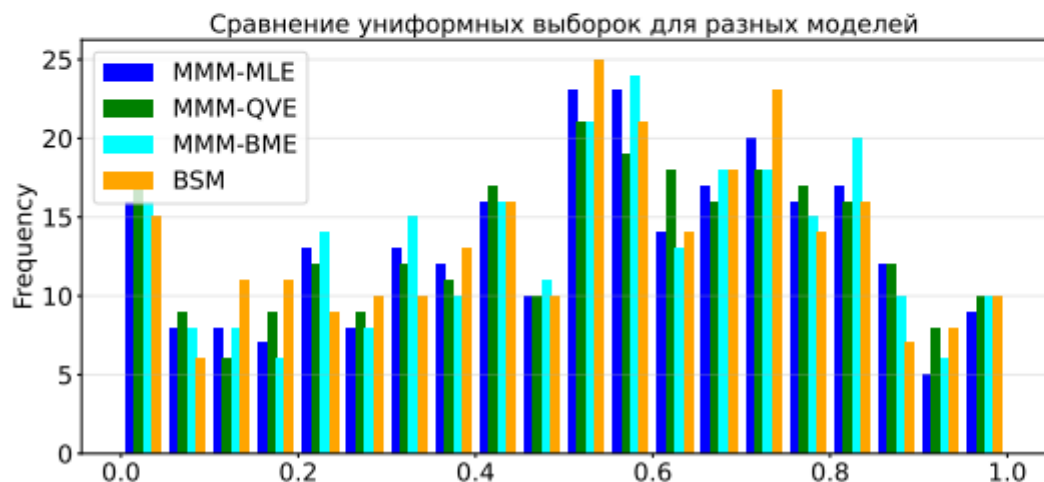
- Минимальная рыночная модель (MMM) задаёт динамику GP: $E[S^*(t)] = 1 + \frac{\alpha}{\eta}(e^{\eta t} - 1)$
- Рассмотрены три метода оценки параметров:
 - MLE — максимизация правдоподобия
 - QVE — по квадратичной вариации
 - BME — байесовская оценка (с априорным распределением)

Метод	η	$SD(\eta)$	α_0	$SD(\alpha_0)$	AIC	BIC
MLE	0.0012	0.0141	0.0769	0.0184	-399.63	-392.46
QVE	-0.0311	0.0040	0.0994	0.0030	-390.27	-383.10
BME	0.0150	0.0060	0.0658	0.0052	-396.07	-388.90

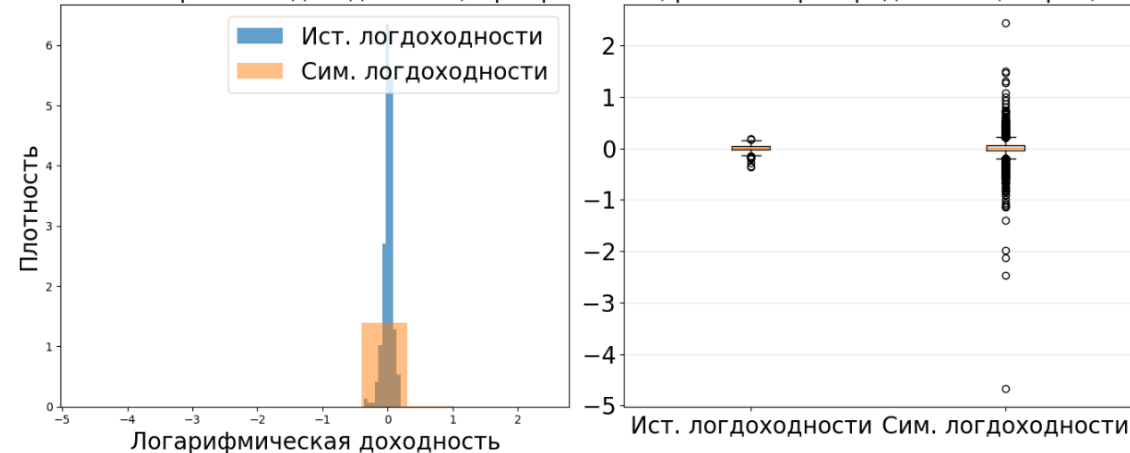
- MLE даёт наименьшие значения AIC/BIC, но оценивает $\eta \approx 0$
- QVE занижает η , что даёт экспоненциальный спад GP
- BME — компромисс: $\eta > 0$, разумные значения, устойчивость

2. Оценка параметров модели минимального рынка для моделирования бенчмарка (дополнительная верификация)

- Проверка распределений остатков с помощью PIT-тестов.
- Ни одна модель не проходит K-S тест на равномерность, но:
 - ▶ MMM сохраняется для стратегий, так как описывает долгосрочные тренды GP.
 - ▶ BME обеспечивает положительную η — условие ВА.



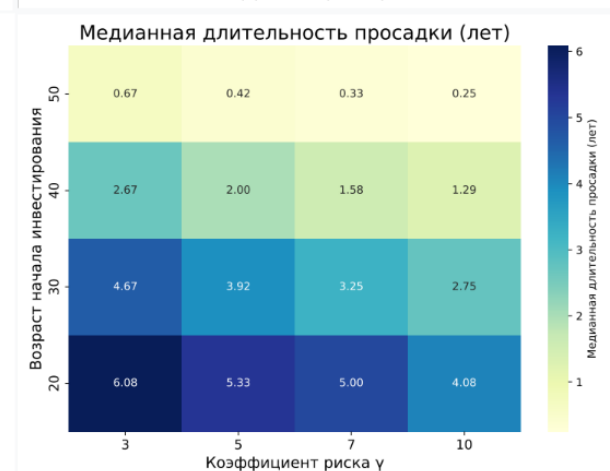
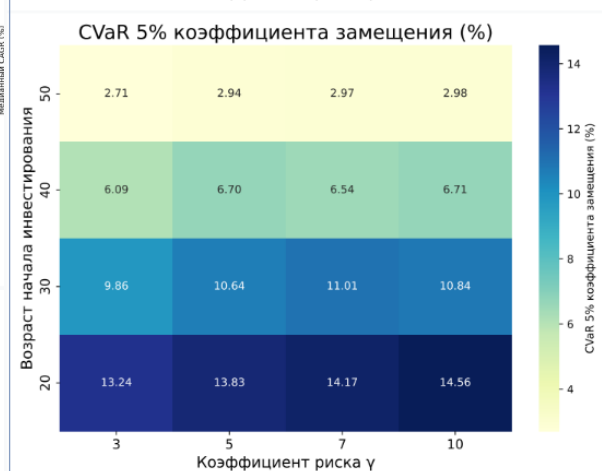
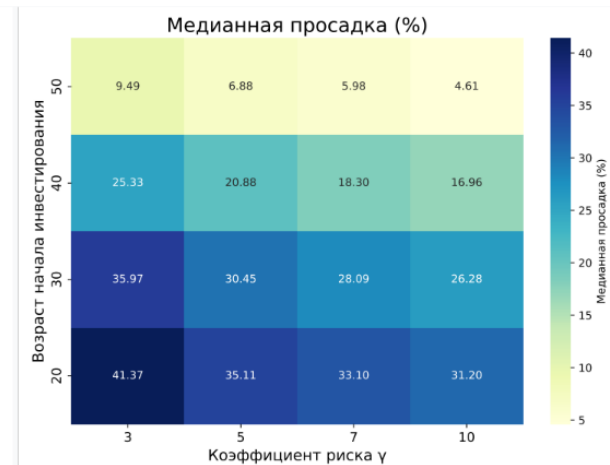
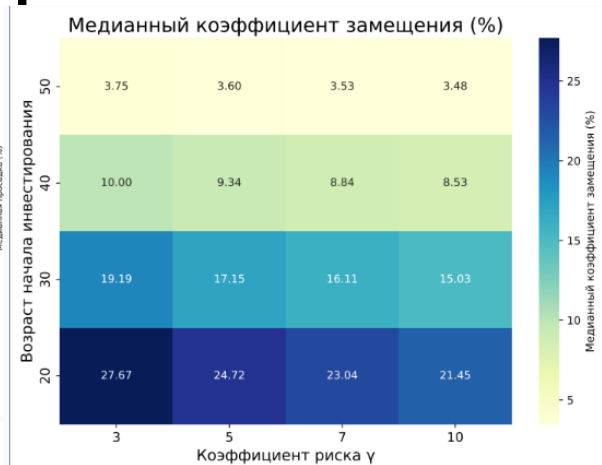
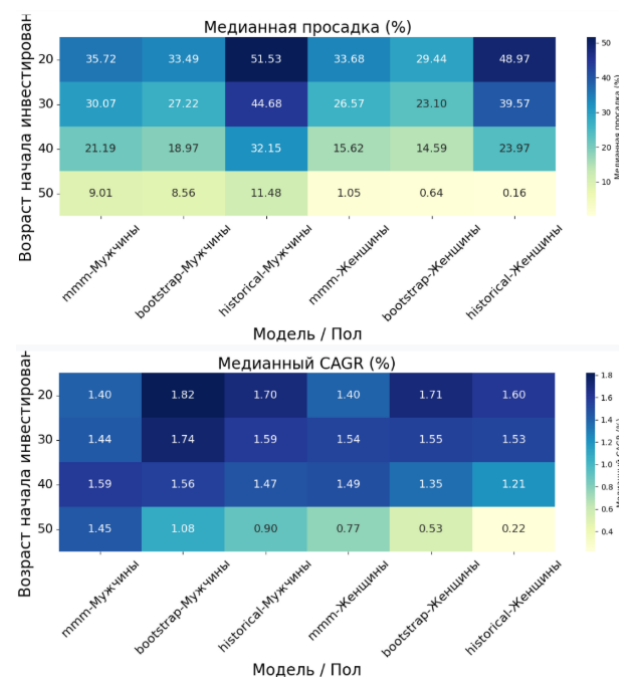
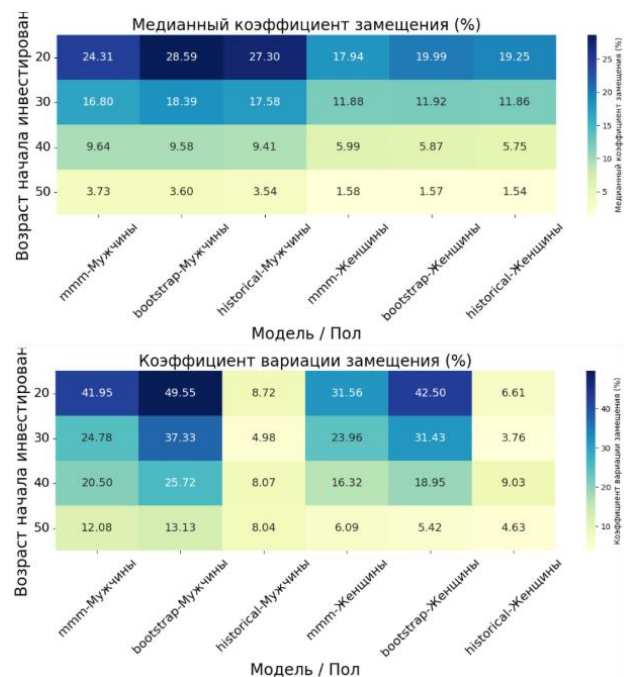
Сравнение гистограмм логдоходностей (нормированные) Сравнение распределений (Boxplot)



- Модель MMM порождает лог-доходности с более тяжёлыми хвостами по сравнению с историческими данными.
- Основная (центральная) часть распределения хорошо согласуется с историческим.
- Это подтверждается как Q-Q диаграммой, так и boxplot-графиком.

MMM остаётся рабочим инструментом, так как хорошо описывает центральную часть распределения и сохраняет долгосрочный тренд GP

6. Анализ чувствительности модели



Чувствительность к выбору модели GP.

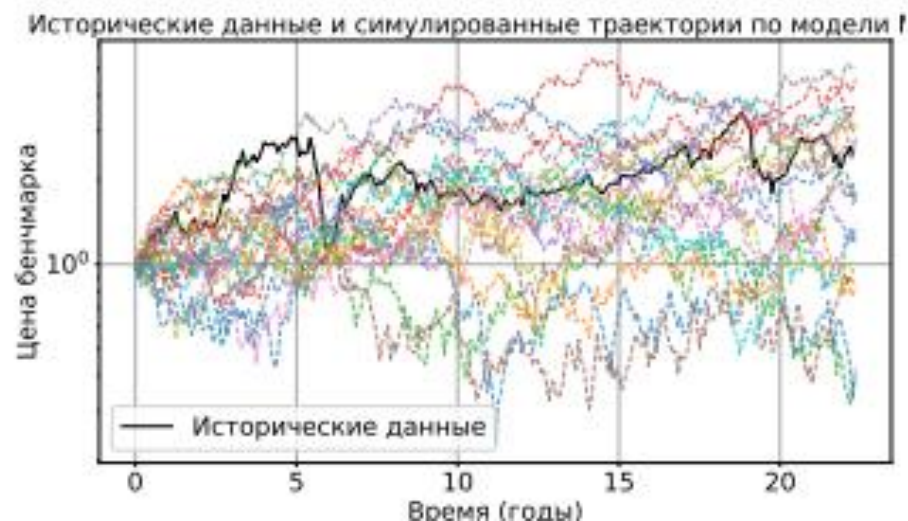
Медианный RR возрастает с увеличением γ — ожидаемый эффект от более агрессивной стратегии.

Наибольший прирост — при старте в 20–30 лет.

CVaR 5% RR тоже растёт с γ , но остаётся на приемлемом уровне при $\gamma \leq 7$.

Чувствительность к коэффициенту рискофобности.

2. Тестирование минимальной рыночной модели на исторических данных



Горизонт (лет)	Источник	Annualized Return [%]	Std Return [%]	Annualized Volatility [%]	Log Annual Return [%]	Max Drawdown [%]
18	Истор.	3,76	2,66	24,32	3,66	69,26
18	MMM	6,24	4,59	36,95	5,95	63,66
20	Истор.	4,81	0,62	24,73	4,70	69,26
20	MMM	6,10	4,14	36,29	5,85	64,64
22	Истор.	5,88	0,10	24,82	5,72	69,26
22	MMM	5,88	3,81	35,64	5,62	65,57
40	MMM	4,70	2,06	31,69	4,57	71,21

Реализованные стратегии показали несколько меньшую доходность по сравнению с теоретическим ожиданием, но при этом сохраняют устойчивость и контроль над просадками

7. Формулировка практических рекомендаций

Для частных инвесторов при самостоятельном инвестировании:

- использовать стратегии фондов жизненного цикла перераспределяя портфель от более рискованных активов к менее рискованным;
- для молодых инвесторов (младше 30 лет) размер совокупной комиссии может составлять значительную часть от итоговой стоимости портфеля, при этом возможно снижение комиссии через самостоятельное управление или через коллективные инвестиции (БПИФ) ;
- для инвесторов старшего возраста, имеющих замороженные пенсионные накопления, использовать ПДС, использование СЖЦ не обязательно;

Для операторов ПДС и негосударственных пенсионных фондов рекомендуется:

- повысить прозрачность комиссий, предусмотреть льготы для долгосрочных инвесторов;
- повысить инвестиционную прозрачность для граждан, демонстрируя результаты на симуляционных моделях;
- активно внедрять бенчмарк-подход и динамических стратегий накопления в целом;
- адаптировать стратегии инвестирования под профиль клиента с учетом возраста, пола, дохода и риск-терпимости;
- применять практики ФЖЦ для учета риск-профиля когорт.